GTR-Rezepte

für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II

TI-*n*spire CX II

Betriebssystem ab OS 5.2

Ebenfalls verwendbar für Modelle mit älterem Betriebssystem sowie das Vorgängermodell TI-*n*spire CX und sämtliche CAS-Versionen.

In wenigen Fällen funktionieren Rezepte nur mit dem CX II – in solchen Fällen ist am Rand vermerkt, wie man mit den CX-Modellen zu einer gleichwertigen Lösung kommt.

Marco Haase · Gymnasium Langenberg

Stand: 6.01.2022

Hinweise für Lehrkräfte

Die Möglichkeiten und Konzepte zur Vermittlung der erforderlichen Bedienkompetenzen für einen effizienten und zielführenden Einsatz des GTR im Mathematikunterricht sind vielfältig. Mein persönlicher Favorit sind diese „GTR-Rezepte“. Die (Hinter-)Gründe habe ich an anderer Stelle ausgeführt: *www.handrechner.de/GTR-Schule/gtr-schule.html*. Nachfolgend einige gesonderte **Hinweise zu den Rezepten für den TI-nspire CX** und meine didaktischen Entscheidungen, die ich getroffen habe.

In vielen Fällen gibt es mehrere Möglichkeiten, eine bestimmte Aufgabe mit dem GTR zu lösen. Ich habe jeweils diejenige(n) Variante(n) ausgewählt, die mir am vorteilhaftesten erschien(en) – unter Berücksichtigung des Bedienaufwandes, der intuitiven Nutzung, der Reduktion möglicher Fehlerquellen etc. Gelegentlich stelle ich verschiedene Wege vor, weil die Auswahl eines geeigneten (GTR-)Lösungsverfahrens ebenfalls zu den Kompetenzen gehört, die Schüler m.E. im Umgang mit dem GTR erwerben sollten.

Der TI-nspire CX ist zweifellos der leistungsfähigste (CAS-freie) GTR auf dem Markt. Wer diese Leistungsfähigkeit braucht, abrufen und umfänglich nutzen kann, braucht diese Rezepte nicht. Für den allergrößten Teil unserer Schüler gilt das nicht. Sie bekommen ein hochkomplexes technisches Gerät in die Hand, benötigen aber nur einen Bruchteil seiner Möglichkeiten. Ähnlich wie ein Hobbyhandwerker, der einen 300-teiligen Profi-Werkzeugsatz bekommt, aber nur 20 Werkzeuge benötigt und bei einem Großteil nicht einmal weiß, wofür man sie überhaupt braucht.

Ich habe mich aus didaktischen Gründen für einen **„minimalistischen Zugang“** zum TI-nspire CX entschieden. Das bedeutet: Ich verzichte bewusst auf den Einsatz des für den TI-nspire CX wesentlichen Dokumenten-Konzepts (Bearbeitungen werden in „Dokumenten“ angelegt, die wiederum in Ordnern abgelegt und langfristig gespeichert werden können) und beschränke mich auf die (der Idee nach nur für ad-hoc-Bearbeitungen gedachten) **„Scratchpad“-Applikation**.
Dieser Zugang erspart den Schülern die Beschäftigung mit dem Dokumentensystem und den damit zwangsweise verbundenen Erwerb weiterer Bedienkompetenzen, die allerdings nicht der Lösung mathematischer Probleme dienen, sondern allein und lediglich der Verwaltung und Handhabung des GTR. Die Verwendung dieses Dokumentensystem hat zur Folge, dass sich eine Reihe zusätzliche Stolperfallen bei der Bedienung ergeben und dies im Hinblick auf einen effizienten Einsatz kontraproduktiv ist.

Ich zweifle nicht daran, dass dieses Dokumentensystem für Nutzer, die den TI-nspire CX intensiv und nahezu täglich (und dann auch noch tendenziell freiwillig und intrinsisch motiviert) nutzen, nützlich und sinnvoll ist. Aber zu dieser Nutzergruppe gehört der typische Schüler eben nicht. Unsere Schüler nutzen den GTR punktuell und zwangsweise. Ein „engeres Verhältnis“ (wie zu ihrem Smartphone) entwickeln die wenigsten Schüler zu ihrem GTR, eine *freiwillige* Beschäftigung über den Unterricht hinaus ist die Ausnahme.

Der Preis für den **Verzicht auf das Dokumentensystem** ist, dass sich zwei der laut Katalog „NRW 2014“ mit einem GTR zu lösenen Aufgaben nicht lösen lassen:

1. Das Zeichnen einer Tangente an einen gegebenen Funktionsgraph in einem bestimmten Punkt *OHNE* bekannte Tangentengleichung. Möglich ist es allerdings (↗ Rezept 10), mit Hilfe des GTR die Tangenten*gleichung* zu bestimmen und dann die Tangente zu ergänzen.
2. Das Zeichnen eines Histogramms zu einer gegebenen Häufigkeitsverteilung. Dies halte ich für eine leicht verschmerzbare Einschränkung, weil das Erstellen des Histogramms mit dem GTR einerseits alles andere als intuitiv ist und zum anderen keine praktische Relevanz für Klausuren oder gar das Zentralabitur hat. Davon abgesehen spielen Histogramme nur eine sehr marginale Rolle im Unterricht, was den Aufwand des Zeichnens mit dem GTR ebenfalls kaum rechtfertigen dürfte.

Grundlagen der Bedienung

Bedienkonzept

„Home"-Taste [⌂on] rechts oben: Dient zum Ein- und (mit [ctrl]) Ausschalten des GTR und **führt zurück zum Startbildschirm**.

Wenn es damit nicht klappt: [esc]-Taste (links oben) probieren.

(ctrl = engl. to control = steuern | esc = engl. to escape = entkommen)

Mit der großen **Navigationstaste** („**Touchpad**") bewegt man sich durch das Menü – durch Klick auf die Pfeile an den vier Seiten oder mittels der berührungsempfindlichen Tastenoberfläche: Wenn man mit dem Finger darüber streicht, bewegt sich ein kleiner Cursor (Pfeil) im Display.

Auswählen eines Menüpunktes:

Entweder den Cursor dorthin bewegen ***oder*** die Auswahlmarkierung mittels Pfeil- oder [tab] -Taste schrittweise zum gewünschten Menüpunkt bewegen. Anschließend den Menüpunkt auswählen, indem man ***entweder*** in die Mitte [☝] der Navigationstaste ***oder*** die Taste [enter] drückt.

Oder man nutzt die **Direktauswahl**, indem man die Taste mit der Ziffer bzw. dem Buchstaben drückt, die vor dem Menüpunkt steht. Das geht meist am schnellsten.

Ich persönlich bevorzuge die Direktauswahl oder die Variante mit [tab] und [enter], weil die Navigationstaste nicht immer zuverlässig funktioniert und die Bedienung dann „hakelig" wird.

Aufgabe 1: Probiere *alle* beschriebenen Möglichkeiten mit den Menüpunkten [A Berechnen] und [5 Einstellungen] aus. Zurück zum Startbildschirm kommst du über die [esc] -Taste.

Hintergrundwissen:

Anders als ein „normaler" Taschenrechner hat der TI-nspire CX nicht nur ein einfaches Eingabefeld, sondern basiert auf einem **Dokumentensystem**: Will man eine bestimmte Berechnung durchführen, wird zunächst ein neues Dokument angelegt, das aus mehreren „Seiten" bestehen und unter frei wählbarem Namen in einer Ordnerstruktur auf dem GTR gespeichert werden kann. Das Arbeiten mit Dokumenten auf dem GTR ist relativ umständlich und nicht intuitiv zu bedienen. Wir werden darum im Unterricht auf das Arbeiten mit Dokumenten konsequent verzichten.

Wir nutzen ausschließlich das sogenannte „**Scratchpad**" (= „Notizblock") mit seinen zwei Modi: [A Berechnen] und [B Graph]. Der Modus kann über den Startbildschirm ausgewählt werden oder – schneller und einfacher – über die [▦]-Taste: Mit jedem Tastendruck schaltet man zwischen dem **Rechenmodus** und dem **Graphmodus** um.

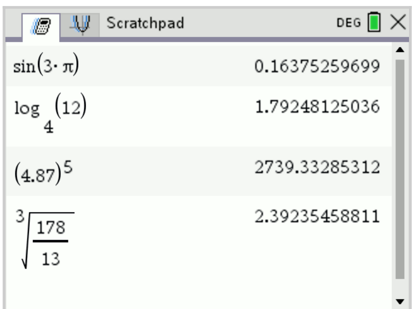
Grundeinstellungen

Die Displayhelligkeit kann man mit [ctrl][+] bzw. [ctrl][−] stufenweise einstellen.

Über das Hauptmenü [5 Einstellungen] [3 Einrichten des Handhelds] kann man den **GTR** (= „**Handheld**") an die persönlichen Bedürfnisse anpassen (Schriftgröße, Zeigergeschwindigkeit etc.).

In den Dokumenteneinstellungen [5 Einstellungen] [2 Dokumenteneinstellungen] sollte man folgende Vorgaben festlegen bzw. prüfen, ob sie schon so eingestellt sind:

Angezeigte Ziffern: Fließ (ohne Zahl dahinter!) | Winkel: Grad



Aufgabe 2: Führe im Scratchpad verschiedene Berechnungen durch. Experimentiere mit Brüchen, Wurzeln und Potenzen. Versuche, die in der Abbildung gezeigten Berechnungen durchzuführen und überprüfe die Ergebnisse. Wenn diese nicht *genau* so aussehen wie abgebildet, hast du etwas falsch gemacht. – Grundeinstellungen prüfen!

Tipp: Die Taste [×] liefert den „Mal-Punkt", die Taste [^] die Eingabemaske für den Exponenten.

Navigieren, Operieren und der Umgang mit Zahlen

Der **Rechenmodus des Scratchpads** spielt *die* zentrale Rolle beim GTR-Einsatz im Mathematikunterricht bis zum Abitur und man kann damit viel (viel!) mehr machen als Terme berechnen. Für einen *effizienten* Einsatz des GTR – d.h. minimaler Aufwand für maximalen Ertrag – ist es darum unverzichtbar, **weitere Möglichkeiten des Scratchpads** kennen und bedienen zu lernen.

Navigieren und Operieren

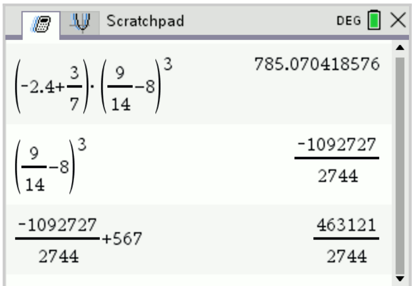
Einzelne Zeichen in der aktuellen Eingabezeile kann man mit [del] entfernen, die komplette aktive Eingabezeile mit [ctrl][del]. Um den gesamten Eingabebereich (das sog. „Protokoll“) zu löschen, nutzt man die [menu]-Taste: [1 Aktionen] [5 Protokoll löschen]. Um die jeweils letzte Aktion rückgängig zu machen, drückt man [ctrl][Z], um rückgängig Gemachtes wiederherzustellen [ctrl][Y].

Das Bewegen im Scratchpad geschieht mit den bekannten Navigationstasten ([tab] und Navigationstaste).

Möchte man die **Eingabe einer Zeile verändern**, die man mit [enter] bereits ausgewertet hat, dann muss zunächst die (alte) Eingabe in die (neue, aktive) Eingabezeile kopiert werden. Das funktioniert, indem man mit den Pfeilen ▲▼ der Navigationstaste die gewünschte Eingabe anwählt (wird dann farbig hinterlegt) und anschließend [enter] drückt. Möchte man nur einen *Teil* eines früheren Eintrags übernehmen, kann man mit den Pfeilen ◀▶ bei gleichzeitig gedrückter [⇧shift]-Taste beliebige Teile markieren und zur Übernahme auswählen. All das funktioniert übrigens genauso mit (alten) Ergebnissen, falls man damit weiter arbeiten möchte. Alternativ kann man das letzte Ergebnis über [ctrl][(–)] als [ans]-Wert („answer“ = letztes Ergebnis) in eine Rechnung einfügen.

Außerdem kann man (die auch am Computer üblichen) Tastenkombinationen nutzen, um mittels „copy & paste“ Teile zu kopieren und an anderer Stelle einzufügen: [ctrl][C] kopiert den markierten Teil in die sogenannte Zwischenablage. [ctrl][V] fügt ihn dort, wo sich gerade die Schreibmarke befindet, wieder ein.

Aufgabe 1: Führe die erste Berechnung durch. Markiere danach den zweiten Faktor der Eingabe, kopiere ihn in die neue Eingabezeile und berechne ihn neu. Führe die Übernahme des Wertes einmal mit [enter] durch und einmal mit „copy & paste“. Nutze für die letzte Berechnung den [ans]-Wert. (*ans* wird nach Drücken von [enter] in der Eingabe durch den Zahlenwert ersetzt und ist darum in der Abbildung nicht sichtbar.)
Lösche zum Schluss das gesamte Scratchpad-Protokoll.



Ein- und Ausgabe von Zahlen

Brüche können entweder als Division z.B. [7][÷][8] oder mit [7][ctrl][÷][8] über die sogenannte Bruchmaske eingegeben werden – die Ausgabe nach Drücken von [enter] erscheint immer in Bruchdarstellung. Die Eingabe von **gemischten Zahlen** über eine Maske ist nicht vorgesehen, $2\frac{7}{8}$ würde man als [2][+][7][÷][8] eingeben, was dann in der Ausgabe – leider! – zu $\frac{23}{8}$ wird. Die Darstellung von gemischten Zahlen ist nicht möglich, die Umwandlung in „ganzzahligen Teil plus Summe eines echten Bruchs“ ist zwar möglich, aber umständlich – wir verzichten darauf.

Falls ein Rechenterm keine Dezimalbrüche enthält und das Ergebnis (vom GTR) als Bruch darstellbar ist, dann erfolgt die Ausgabe in Bruchdarstellung. Möchte man stattdessen einen **dezimalen (Näherungs-)Wert** sehen, erhält man diesen durch [ctrl][enter].

⚠ **Hinweis**: Ist das Ergebnis ein Dezimalbruch, dann lässt sich dieser nicht zuverlässig in einen Bruch umwandeln! Es gibt zwar eine Funktion „In Bruch approximieren“, aber diese sollte man (wenn man sie entdeckt hat) *nicht* nutzen. Das Ergebnis ist in vielen Fällen unbrauchbar! ⚠

Aufgabe 2: Experimentiere mit der Eingabe und Umrechnung von Bruch- und Dezimalzahlen. Nutze auch die gelernten Techniken zur Übernahme von (Teilen) vorheriger Ein- oder Ausgaben.

Eingebaute Funktionen und Variablen

Für den effizienten Einsatz des GTR ist es wichtig, die *wirklich nützlichen* Funktionen zu kennen und zu wissen, wie man sie richtig bzw. optimal einsetzt.

Eingebaute Funktionen nutzen

Es gibt bis zu fünf verschiedene Wege, um eingebaute Funktionen einzusetzen:

1. **Funktionskatalog** [📖]. Tab [1] liefert eine alphabetische Liste, Tab [2] eine nach Kategorien geordnete Liste sämtlicher eingebauter Funktionen. Man kann dort eine Funktion auswählen und mit [enter] im Scratchpad einfügen.
2. **Kontextmenü** [menu]. Mittels der bekannten Navigationsmöglichkeiten (↗ Rezept 1) steigt man so weit in der Menüstruktur herab, bis man die gewünschte Funktion gefunden hat, und fügt sie mit [enter] im Scratchpad ein. Ich empfehle dafür die Verwendung der **Direktnavigation**.
3. **Eingabemasken** [▫{▫]. Für ausgewählte mathematische Operatoren und Konstrukte stehen spezielle Eingabemasken zur Verfügung. Wählt man eine Maske aus, ist sie zunächst mit Platzhaltern versehen, die man dann mit den gewünschten Werten befüllt.
4. **Sondertasten**. Für ausgewählte Funktionen gibt es direkt eine Taste(nkombination) z.B. [x²], [10ˣ] oder [ctrl] [x²] für [√]. Für die trigonometrischen Funktionen (Winkelfunktionen) gibt es die Auswahltaste [trig].
5. **Manuelle Eingabe** über das Tastenfeld. Bei allen Funktionen, die einen „Namen“ haben, kann dieser über das Buchstabenfeld geschrieben werden, z.B. [S][I][N] statt [trig] sin.

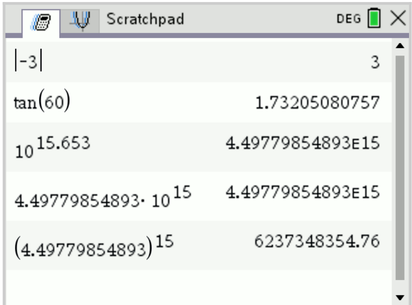
Aufgabe 1:

Präge dir während bzw. nach der Bearbeitung der drei Teilaufgaben mindestens zwei der oben vorgestellten Eingabemethoden ein, mit denen du gut zurechtkommst.

a) Berechne den Betrag („Absolutwert“) von −3 mit den Eingabemethoden 1, 3, 5.
Der Betrag kann über die Eingabemaske |☐| oder den Funktionsnamen abs(−3) berechnet werden.

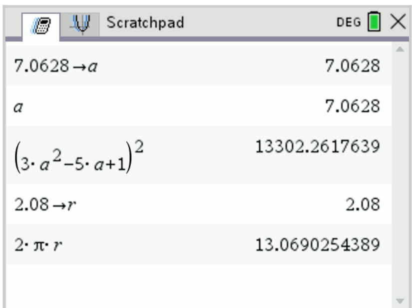
b) Berechne tan(60°) mit den Eingabemethoden 1, 4, 5.

c) Berechne $10^{15.653}$ mit den Eingabemethoden 1, 4, 5.



Die Ausgabe sieht merkwürdig aus: Da steht ein E in der Zahl! Was ist hier passiert? – Das („echte“) Ergebnis hat 15 Stellen *vor* dem Komma. Das sind mehr Stellen (vor dem Komma!), als der GTR darstellen kann. In solchen Fällen schaltet er automatisch um in die Darstellung mit Hilfe von **Zehnerpotenzen**:
4.49E15 bedeutet $4{,}49 \cdot 10^{15}$. ⚠ Nicht verwechseln mit $4{,}49^{15}$! ⚠

Werte speichern und abrufen



Bei komplexeren Aufgaben werden bestimmte Zahlenwerte (z.B. Zwischenergebnisse) wiederholt benötigt. Es lohnt sich, einen solchen Wert einer **Variablen** zuzuweisen und so für die Wiederverwendung zu speichern.

Namen für Variablen bestehen aus einem oder mehreren Buchstaben und können frei gewählt werden. Die Zuweisung eines Wertes zu einer Variablen erfolgt mit [sto→] (engl. to store = speichern).

Um den Wert 7,0628 der Variablen a zuzuweisen, gibt man ein: [7][.][0][6][2][8] [ctrl][var] [A]

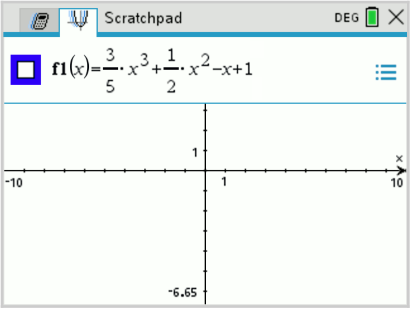
Der Wert kann nun direkt abgerufen ([A] [enter]) oder in einem Term verwendet werden.

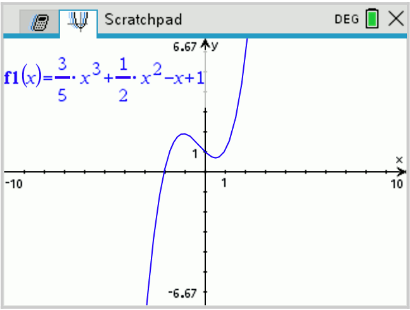
Aufgabe 2: Führe die Operationen durch, die in der Abbildung gezeigt werden.

Funktionen entdecken: Graphen

Zeichne den Graph der Funktion f mit f(x) = $\frac{3}{5}x^3+\frac{1}{2}x^2-x+1$.

1. Funktionsterm eingeben

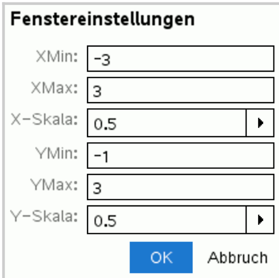




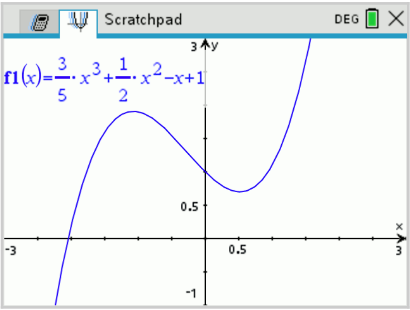
Schalte mit der -Taste um in den **Graphmodus** des Scratchpad, öffne dort mit tab oder ctrl G die Eingabezeile und gib dort den Funktionsterm f1(x) ein. Danach mit enter abschließen: Der Funktionsgraph wird gezeichnet.

Hinweise: Der Term kann mit den bekannten Tasten korrigiert oder gelöscht werden. Weitere Funktionen f2, f3 usw. können *zusätzlich* eingegeben und die Graphen gezeichnet werden. Mit den Pfeilen ▲▼ der Navigationstaste kann zwischen diesen Funktionen ausgewählt werden.
Will man einen Graphen ausblenden (aber den Term nicht löschen), dann kann man in dem Markierungsfeld links das Häkchen entfernen. Theoretisch geht das durch Bewegen des Cursors auf ☑ und Drücken auf . Praktisch funktioniert es besser, wenn man die Schreibmarke mit den Navigationspfeilen ganz nach links bewegt (bis das Kästchen eine Extra-Umrandung bekommt) und dann enter drückt.
Es gibt auch Möglichkeiten, die Darstellung eines Graphen zu ändern durch Auswahl der Linienstärke, Strichelung und Farbe. Das ist aber umständlich und lohnt sich eher nicht.

2. Zeichenfenster geeignet einstellen

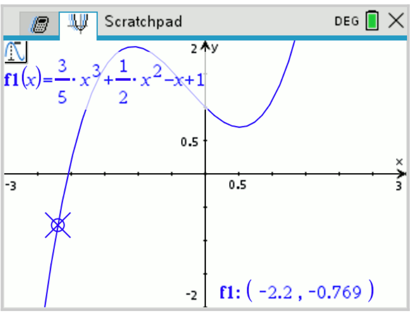


Die Standardeinstellung des Zeichenfensters ist x∈[−10; 10] und y∈[−6,63; 6,63]. Nicht immer ist das ein günstiger Ausschnitt.
Über menu [4 Fenster/Zoom] [1 Fenstereinstellungen] kann der Bereich durch Angabe der Intervallgrenzen festgelegt werden, ebenso auch die Abstände der Achsenmarkierungen („Skalierung").
Wähle die Fenstereinstellungen so wie rechts abgebildet.
Alternativ können die Intervallgrenzen durch Anklicken der Werte an den Enden der Achsen mit direkt in der Zeichnung geändert werden.
Die sonstigen Möglichkeiten von menu [4 Fenster/Zoom] können ebenfalls genutzt werden, sind aber weniger flexibel und präzise als die „Fenstereinstellungen".



3. Graph abfahren (Trace-Modus)

menu [5 Spur] [1 Grafikspur] blendet den **Trace-Cursor** ein. Nun kann der Graph mit den Pfeilen ◀ ▶ der Navigationstaste schrittweise durchlaufen werden. Die Schrittweite lässt sich festlegen über menu [5 Spur] [3 Spur-Einstellungen]. Empfehlenswert ist häufig eine Schrittweite von 0,1. Die Koordinaten des jeweiligen Punktes auf dem Graph werden dabei eingeblendet.

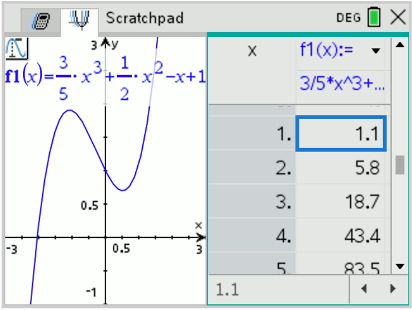


Hinweis: Funktionsterme (und andere Elemente) können im Fenster an eine andere Stelle verschoben werden:
Sobald sich der Pfeil über dem Element befindet, ändert er sein Aussehen in , nach Drücken von in . Jetzt kann der Term mit dem Touchpad verschoben werden. Mit esc beendet man den Prozess.

Funktionen entdecken: Wertetabellen

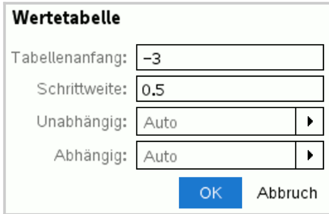
Erstelle für f mit $f(x) = \frac{3}{5}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + 1$ eine Wertetabelle für $x \in [-3; 3]$ und bestimme $f(-\sqrt{5})$.

1. Wertetabelle erstellen und anpassen



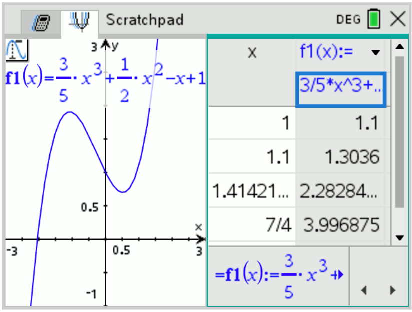
Gib den Funktionsterm ein und und lass den Graph zeichnen (↗ Rezept 4). Die Fenstereinstellungen sind egal. Über [menu] [7 Tabelle] [1 Tabelle mit geteiltem Bildschirm] oder mit der Tastenkombination [ctrl][T] lässt sich neben dem Graphen eine Wertetabelle einblenden (und genau so wieder ausblenden).

Standardmäßig beginnt die Tabelle mit x=1, wird aber nach unten und oben (fast) beliebig weit fortgesetzt, wenn man mit den Pfeilen ▲▼ weiter scrollt.



Die voreingestellte Schrittweite 1 und der Startwert für x können über [menu] [2 Wertetabelle][5 Funktionseinstellungen bearbeiten] geändert werden.

Wähle Startwert und Schrittweite wie rechts abgebildet und lass dir die neue Wertetabelle dazu anzeigen.



Möchte man individuelle Werte für x einsetzen ohne feste Schrittweite, muss man in diesem Fenster die Einstellung von Unabhängig: Auto in Unabhängig: Frage ändern.

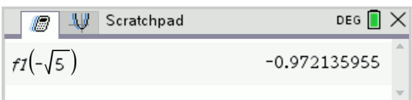
Damit erhält man eine zunächst leere Wertetabelle, in die man die x-Werte einträgt. Die zugehörigen y-Werte werden automatisch berechnet.

Probiere es mit den Werten aus, die in der Abbildung rechts verwendet wurde. Der dritte x-Wert ist √2.

2. Einzelne Funktionswerte berechnen

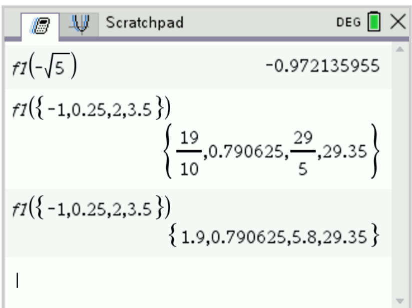
Zur Berechnung von f(−√5) kann man nach der gerade beschriebenen Methode im **Graphmodus** für x den Wert −√5 in der **Wertetabelle** eingeben und den y-Wert dann ablesen.

Hat man den Graphen gezeichnet und braucht nur diesen einzelnen Wert (und keine Wertetabelle), dann kann man auch im **Trace-Modus** einfach −√5 [enter] eingeben. Der Trace-Cursor springt unmittelbar zum entsprechenden Punkt auf dem Graph und zeigt die Koordinaten an.



Befindet man sich gerade im **Rechenmodus** und benötigt nur einen Funktionswert, dann geht es am schnellsten, wenn man f1(−√5) direkt im Scratchpad eingibt. Das funktioniert natürlich nur, wenn die Funktion f1 zuvor festgelegt („definiert“) wurde.

Man kann f1 als [F][1] manuell eingeben, oder die Taste [var] drücken und f1 aus der **Variablenliste** auswählen. Probiere *alle* beschriebenen Möglichkeiten aus, auch die nachfolgende.



Man kann im Rechenmodus auch (beinahe) eine Wertetabelle mit frei wählbaren x-Werten erstellen durch die Verwendung von so genannten **Listen**:

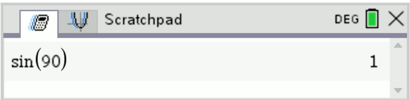
In geschweiften Klammern („Mengenklammern“) werden beliebig viele x-Werte durch Komma getrennt aufgelistet und als Argument an die Funktion übergeben. Das Ergebnis ist dann eine Liste mit allen zugehörigen y-Werten. Möchte man die y-Werte auf jeden Fall als Dezimalwerte haben, benutzt man das bekannte [ctrl][enter].

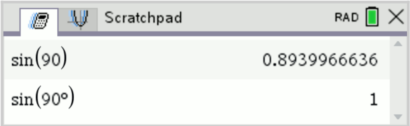
Trigonometrische Funktionen

Maßeinheiten für Winkel

Damit bei der Anwendung der Winkelfunktionen die „richtigen" Ergebnisse berechnet werden, muss die passende Einheit für Winkelmaße verwendet bzw. eingestellt werden (↗ Rezept 1): Für **geometrische Berechnungen** verwendet man **Gradmaß** (engl. **DEG**gree = Gradmaß) für **funktionale Berechnungen** jedoch **Bogenmaß** (engl. **RAD**ian = Bogenmaß). In der Statusleiste (oben im Display) kann man ablesen, welche Winkeleinheit jeweils eingestellt ist.

Hinweis: Ein Winkel von 180° entspricht einem Winkel von π (Bogenmaß). Eine Umrechnung zwischen beiden Einheiten ist über Dreisatzrechnung möglich.



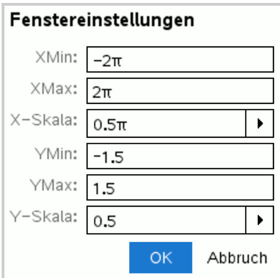


Für die Untersuchung trigonometrischer Funktionen wird der GTR auf **Bogenmaß (RAD)** eingestellt. Im Hauptmenü: [5 Einstellungen] [2 Dokumenteneinstellungen] Winkel: Bogenmaß
Auch in dieser Einstellung kann in Gradmaß gerechnet werden, dann muss man allerdings das Gradzeichen mit angeben. Man findet es in der obersten Zeile der **Zeichentabelle**, die man mit ctrl 📖 aufruft.
Sieh dir die Abbildung an und probiere es aus (↗ Rezept 3: Eingabemöglichkeiten!).

Graphen zeichnen und transformieren

Zeichne die Graphen der Sinus- und der Kosinusfunktion im Intervall [−2π ; 2π].
Verschiebe die Graphen und sieh dir die Auswirkungen auf den Funktionsterm an.

Graphen trigonometrischer Funktionen werden genauso gezeichnet wie alle anderen Graphen auch. Die Verwendung von Bogenmaß als Einheit hat allerdings Auswirkungen auf eine (sinnvolle) Festlegung der Intervallgrenzen und auf die Achsenskalierung.

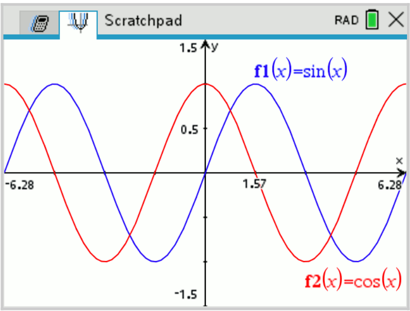


1. Funktionsterme eingeben

Lege im Graphmodus fest: f1(x) = sin(x) und f2(x) = cos(x).

2. Zeichenfenster geeignet einstellen

Lege über menu [4 Fenster/Zoom] [1 Fenstereinstellungen] die Einstellungen des Zeichenfensters so fest wie in der Abbildung rechts.



3. Graphen zeichnen

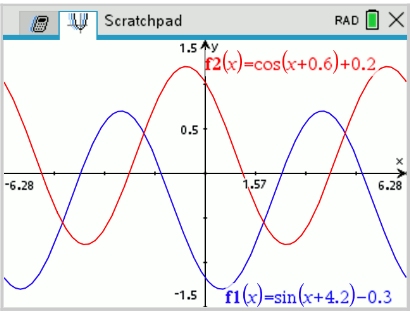
Das Ergebnis sollte so aussehen wie rechts abgebildet.

4. Graphen transformieren

Bewege den Pfeil mit dem Touchpad auf einen der Graphen, bis der Cursor die Gestalt ✣ annimmt. Drücke in die Mitte und verschiebe den Graph ein wenig mit dem Touchpad, bis der Cursor zur greifenden Hand wird. Jetzt kannst du den Graph mit dem Touchpad ohne weiteres Drücken von beliebig verschieben und direkt die Auswirkungen auf den Funktionsterm beobachten.

Probiere dies aus und analysiere, welche Verschiebung sich in welcher Weise auf den Term auswirkt.

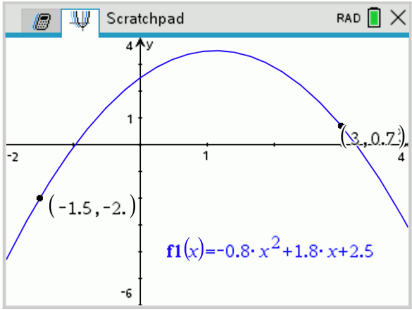
Versuche, die Graphen so zu verschieben wie in der Abbildung gezeigt (natürlich *nicht* durch Eingabe des Terms!).



Änderungsraten

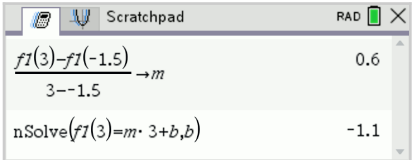
Bestimme die mittlere Änderungsrate von f mit f(x) = −0,8x² + 1,8x + 2,5 für x ∈ [−1,5; 3] und die Gleichung der Sekante, die durch die zugehörigen Punkte des Graphen von f verläuft. Bestimmte die momentane Änderungsrate von f an der Stelle x=−0,5.

Mittlere Änderungsrate und Sekante

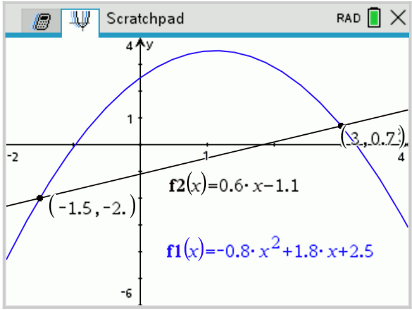


Zunächst wird im Graphmodus die Funktion definiert.

In der Abbildung sind die beiden Punkte markiert, durch die die Sekante verlaufen soll. Dies erreicht man, indem man im Trace-Modus (↗ Rezept 4) die Punkte durch Eingabe der x-Werte anspringt und dann einmal enter drückt. Für die Lösung erforderlich ist das Markieren der Punkte nicht, kann aber zur späteren Kontrolle genutzt werden.



Die mittlere Änderungsrate wird im Rechenmodus mittels Differenzenquotient berechnet. Wenn f1 zuvor definiert wurde (z.B. im Graphmodus), dann kann man den ganzen Term eingeben und den Wert der mittleren Änderungsrate der Variablen m zuweisen (↗ Rezept 3).

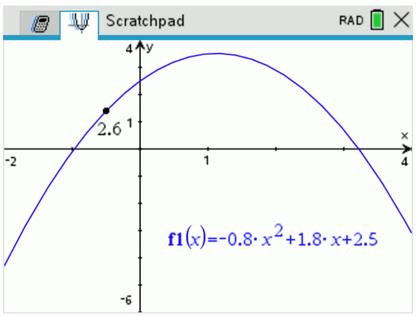


Zur Bestimmung des y-Achsenabschnitts lässt sich der **numerische Gleichungslöser nSolve** einsetzen. Der Aufruf erfolgt über menu [3 Algebra] [1 Numerisch Lösen] oder mittels manueller Eingabe (↗ Rezept 3). Als Argumente erwartet nSolve eine beliebige Gleichung und die Lösungsvariable. Das Ergebnis ist (im Beispiel) der gesuchte Wert für b.

Die Gleichung der Sekante lautet also g(x) = 0,6x−1,1.

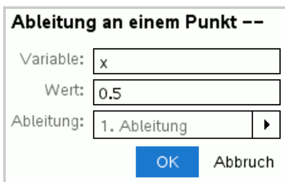
⚠ Der **numerische Gleichungslöser** liefert *immer maximal eine Lösung*, auch wenn eine Gleichung mehrere Lösungen hat. Man sollte ihn darum möglichst nur einsetzen, wenn man *sicher* ist, dass eine Gleichung höchstens *eine* Lösung hat oder man genau weiß, was man tut. Die Zeichnung der Sekante dient hier nur zur Kontrolle und wird von der Aufgabenstellung nicht verlangt.

Momentane Änderungsrate



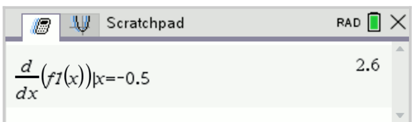
Über menu [6 Graph analysieren] [5 dy/dx] lässt sich im **Graphmodus** der Wert der momentanen Änderungsrate einblenden (hellgrau), während man den Graphen wie im Trace-Modus abfahren kann. Um die momentane Änderungsrate an einer *bestimmten* Stelle zu erhalten, gibt man die Stelle einfach ein und bestätigt mit enter. Der entsprechende Punkt auf dem Graphen wird markiert und der Wert der momentanen Änderungsrate an dieser Stelle dauerhaft angezeigt. Die momentane Änderungsrate von f an der Stelle x=−0,5 beträgt demnach 2,6.

Hinweis: $\frac{dy}{dx}$ bzw. $\frac{df}{dx}$ ist eine mathematische Schreibweise für die momentane Änderungsrate der Funktion f an der Stelle x und wird gelesen „dy *nach* dx" bzw. „df *nach* dx".



Alternativ kann man die **momentane Änderungsrate im Rechenmodus** bestimmen. Mit menu [4 Analysis] [1 Ableitung an einem Punkt] öffnet sich ein Dialogfenster, in dem nur noch der passende x-Wert einzugeben ist. Als Ergebnis erhält man eine Eingabemaske im Scratchpad, in der man noch f1(x) ergänzen muss.

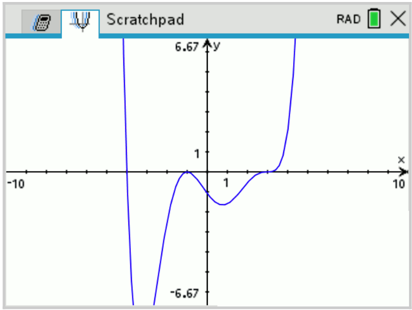
Die Abbildung zeigt das Ergebnis.



Ganzrationale Funktionen: Nullstellen

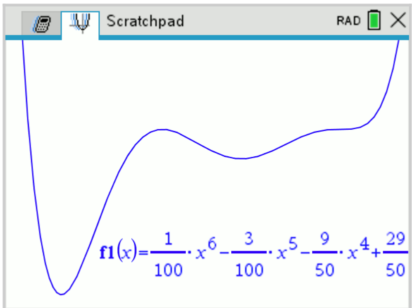
Bestimme die Nullstellen von f mit f(x) = $\frac{1}{100}x^6-\frac{3}{100}x^5-\frac{9}{50}x^4+\frac{29}{50}x^3+\frac{9}{20}x^2-\frac{27}{20}x-\frac{27}{25}$.

Graphisches Lösen



Gib den Term als f1(x) im Graphmodus ein und lass den Graphen zeichnen.

1. Fenster- und Analyseeinstellungen vornehmen



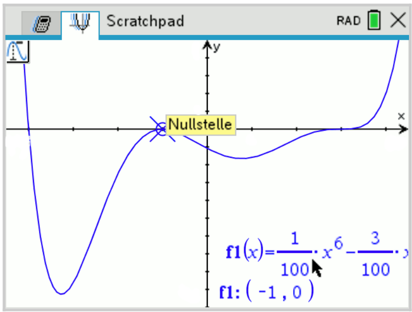
Die Standard-Fenstereinstellung ist offensichtlich nicht gut: Das x-Intervall ist unnötig groß, das y-Intervall zu knapp bemessen. Ändere die Einstellungen so, dass ein geeigneter Ausschnitt zu sehen ist, etwa so wie auf der zweiten Abbildung (das Koordinatensystem ist absichtlich entfernt, damit man sich eigene Gedanken macht).

Lege die **Genauigkeit der Koordinatenwerte** und die **automatische Punkterkennung** fest über menu [8 Einstellungen]:

Angezeigte Ziffern: Fließ und (nach unten scrollen ...)

☑ Interessante Punkte automatisch suchen.

2. Nullstellen ermitteln



Schalte in den **Trace-Modus** (↗ Rezept 4) und fahre den Graph ab. Unabhängig von der eingestellten Schrittweite bleibt der Trace-Cursor an allen **„interessanten Punkten"** automatisch hängen, zeigt an, um was für einen Punkt es sich handelt und gibt die Koordinaten an.

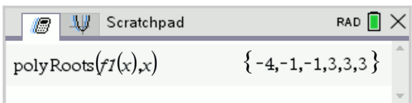
Auf diese Weise können alle Nullstellen nacheinander abgefahren und die Werte notiert werden.

Hinweis: Es gibt auch die Möglichkeit, jede Nullstelle einzeln über menu [6 Graph analysieren] [1 Nullstelle] zu ermitteln. Das ist aber aufwändiger als die Trace-Methode.

Algebraisches Lösen

Im **Rechenmodus** steht mit dem **Polynomgleichungslöser** ein mächtiges Werkzeug zur Verfügung, das wir noch häufiger einsetzen werden. Da man Nullstellen einer ganzrationalen Funktion auch als „Wurzelns des Polynoms" bezeichnet (in der Schule eher nicht), heißt diese Funktion **polyRoots**. Man kann die Funktion über den Katalog 📖 aufrufen, per manueller Eingabe oder via menu [3 Algebra] [3 Polynomwerkzeuge] [2 Reelle Polynomwurzeln].

Die Abbildung zeigt, was man als Argumente in die Klammern setzen muss und das Ergebnis der Berechnung.

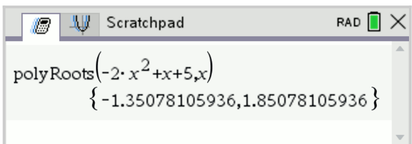


Erklärung: PolyRoots setzt f1(x) = 0 und löst diese Gleichung nach x auf. Da wir f1 zuvor definiert haben, wird hier die Gleichung $\frac{1}{100}x^6-\frac{3}{100}x^5-\frac{9}{50}x^4+\frac{29}{50}x^3+\frac{9}{20}x^2-\frac{27}{20}x-\frac{27}{25}=0$ gelöst.

Am Ergebnis kann man außerdem die **Vielfachheit der** einzelnen **Nullstellen** ablesen:

$x_1 = -4$ ist eine einfache Nullstelle, $x_2 = -1$ ist eine doppelte und $x_3 = 3$ eine dreifache Nullstelle.

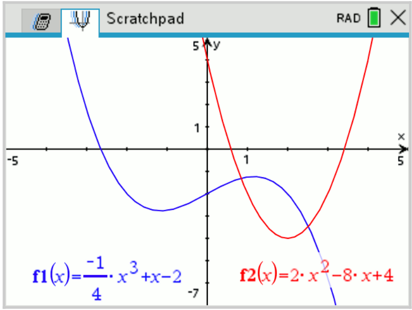
Man kann polyRoots auch aufrufen, ohne zuvor eine Funktion definiert zu haben, indem man das Polynom direkt als Argument eingibt – siehe Abbildung rechts.

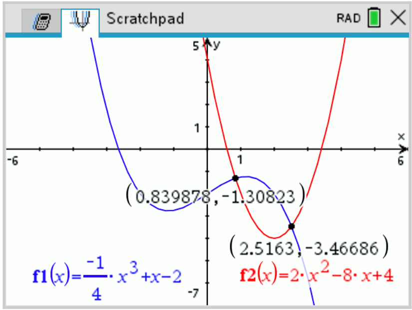


Ganzrationale Funktionen: Schnittpunkte

Bestimme die Schnittpunkte der Graphen von $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + x - 2$ und $g(x) = 2x^2 - 8x + 4$.

Graphisches Lösen



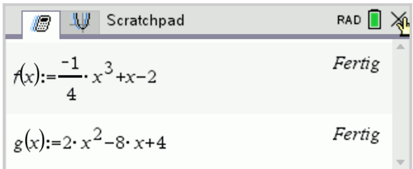


Gib beide Terme im Graphmodus ein und lass die Graphen zeichnen. In der Zeichnung sind zwei Schnittpunkte sichtbar. Über [menu] [6 Graph analysieren] [4 Schnittpunkt] aktiviert man die Schnittpunkterkennung. Man legt die linke Suchgrenze fest durch Eingabe eines Zahlenwertes oder durch Positionierung mit dem Touchpad und [enter].

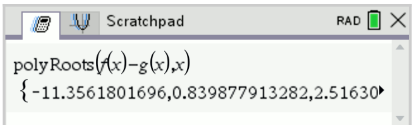
Der Suchbereich wird dann mit dem Touchpad nach rechts erweitert, beim Überfahren von Schnittpunkten werden die Koordinaten (hellgrau) eingeblendet. Fixiert man die rechte Suchgrenze ebenso wie zuvor die linke, dann wird genau ein Schnittpunkt im Suchbereich markiert und die Koordinaten dauerhaft angezeigt. Will man das für alle Schnittpunkte erreichen, muss man den Prozess entsprechend oft wiederholen. Das Ergebnis könnte dann so aussehen wie rechts abgebildet. Die Schnittpunkte sind also $S_1(0{,}8399 \mid -1{,}3082)$ und $S_2(2{,}5163 \mid -3{,}4669)$.

Algebraisches Lösen

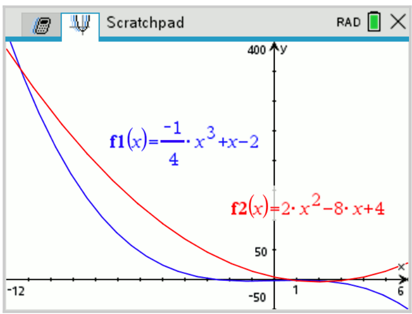
Am schnellsten und zuverlässigsten lässt sich die Aufgabe im Rechenmodus lösen. Sinnvoll ist es, wenn man die Funktionen zuvor definiert. Entweder in der bekannten Weise im Graphmodus als f1 und f2 oder – und das ist neu – direkt im Rechenmodus mit Hilfe des **Definitionsoperators** [:=]. Man wählt einen beliebigen Funktionsnamen – hier sinnvollerweise f und g – und weist den Funktionsterm mit [ctrl] [⊞] zu.



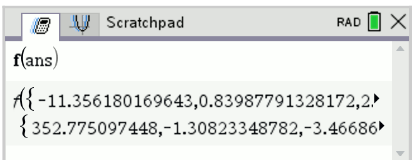
Hinweis: Wir hätten die Funktionen auch als f1 und f2 definieren können. Dann wären beide Funktionen zugleich im Graphmodus bekannt gewesen. Die Zeichenfarbe ist dann immer auf schwarz voreingestellt.



Die **Schnittstellen** sind die Lösungen von f(x) = g(x), was äquivalent ist zu f(x)−g(x)=0. Da f und g Polynome sind, ist auch die Differenz f(x)−g(x) ein Polynom, und man kann den bewährten **Polynomgleichungslöser** einsetzen, der zuverlässig *alle* Lösungen der Gleichung liefert.



Oh, was ist das? Die Gleichung hat *drei* Lösungen, nicht nur zwei – demnach gibt es also *drei* Schnittpunkte. Einer davon wurde beim graphischen Lösen nicht gefunden, weil er außerhalb des Zeichenfensters lag. Erst wenn man den Ausschnitt deutlich vergrößert, entdeckt man ihn.



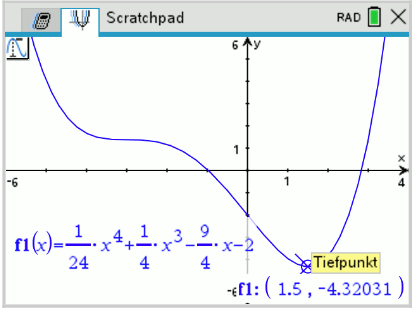
Nun fehlen noch die y-Werte zu den Schnitt*stellen*, denn gesucht sind ja die **Schnitt*punkte***. Dazu müssen die Stellen als x-Werte in f(x) oder g(x) eingesetzt werden.

Wir nutzen dafür die komfortable Möglichkeit, Listen von Werten als Argumente übergeben zu können (↗ Rezept 5), greifen über ans auf die letzte Ausgabe zurück und erhalten so eine Liste mit allen y-Werten. Der dritte Schnittpunkt liegt demnach bei $S_3(-11{,}3562 \mid 352{,}7751)$.

Ganzrationale Funktionen: Steigungsverhalten

Bestimme die lokalen Extrempunkte des Graphen von f mit f(x) = $\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{4}x^3-\frac{9}{4}x-2$.

Graphisches Lösen

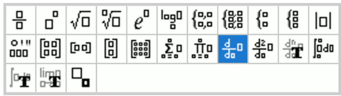


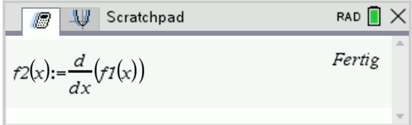
Hoch- und Tiefpunkte gehören nach dem Verständnis des GTR ebenso wie Nullstellen zu den „interessanten Punkten“ und können darum mit dem gleichen Verfahren ermittelt werden wie Nullstellen(↗ Rezept 8). Der Graph hat demnach genau einen Tiefpunkt bei T_1(1,5 | −4,3203).

Erinnerung (↗ Rezept 9): Falls es Extrempunkte außerhalb des sichtbaren Zeichenfensters gibt, werden diese nicht erkannt!

Algebraisches Lösen

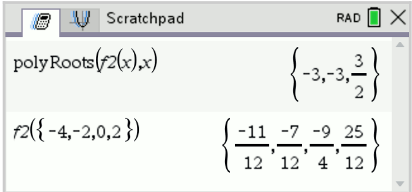
Notwendige Bedingung für das Vorliegen von Extremstellen ist, dass dort f'(x) = 0 ist. Zwar kann der GTR den Term von f '(x) nicht ermitteln, aber mittels **Ableitungsoperator** an *jeder* Stelle x den Wert von f '(x), und das genügt. Wir definieren auf diese Weise f2 als Ableitungsfunktion von f1 (↗ Rezept 9). Die passende Maske wählt man über aus und befüllt sie wie in der Abbildung gezeigt.





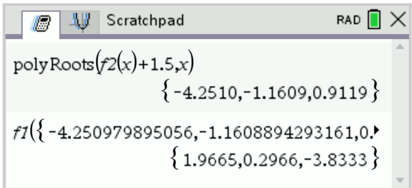
Hinweis: Durch die Festlegung als f2 steht f ' auch im Graphmodus zur Verfügung. Der Graph von f' lässt sich so zeichnen.

Die Bestimmung der Nullstellen der 1. Ableitung erfolgt mit polyRoots. Danach wird noch die Steigung an geeigneten Stellen berechnet, um mittels Vorzeichenwechselkriterium die Art der Extremstelle zu ermitteln. Hier liegt nur bei x=1,5 ein lokales Minimum vor. Der zugehörige y-Wert wird mittels f1(1,5) bestimmt.



Bei älteren Modellen/OS-Versionen funktioniert polyRoots nicht in Kombination mit dem Ableitungsoperator. In dem Fall muss der Ableitungsterm manuell gebildet und als f2 definiert werden.

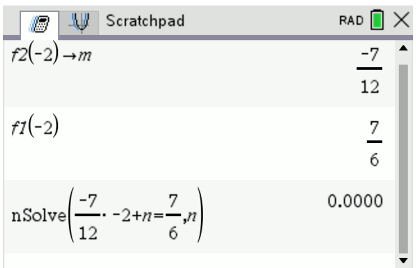
Bestimme alle Punkte des Graphen von f, an denen die Steigung −1,5 beträgt.



Die gesuchten Stellen sind die Lösungen der Gleichung f'(x) = −1,5, was äquivalent ist zu f '(x)+1,5 = 0. Die Lösungen können mit polyRoots ermittelt werden – und zwar unter Verwendung der über den Ableitungsoperator definierten Funktion f2. Die zugehörigen y-Werte werden über f1(ans) berechnet. Es gibt demnach drei Punkte, an denen die Steigung −1,5 beträgt: P_1(−4,2510 | 1,9665), P_2(−1,1609 | 0,2966) und P_3(0,9119 | −3,8333).

Hinweis: Mit diesem Ansatz bestimmt man auch alle **Stellen, an denen eine Funktion einen bestimmten y-Wert annimmt**. Ist der vorgegebene y-Wert z.B. 5, dann liefert polyRoots(f1(x)−5,x) alle diese Stellen.

Bestimme die Gleichung der Tangente, die den Graphen von f an der Stelle x=−2 berührt.



Das Verfahren unterscheidet sich nur im ersten Schritt von dem zur Bestimmung der Sekantengleichung (ausführlich in ↗ Rezept 7): Die Steigung m der Tangente ist der Wert von f'(x) im Berührpunkt – der weitere Ablauf ist identisch. Der y-Achsenabschnitt ist hier n=0.

Die Tangentengleichung lautet also: $t(x) = -\frac{7}{12}\cdot x$

Ganzrationale Funktionen: Krümmungsverhalten

Berechne die Wendepunkte des Graphen von f mit $f(x) = \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x - 2$.

Zwar sind auch Wendepunkte „interessante Punkte", dennoch werden sie beim Ablaufen eines Graphen im Trace-Modus nicht angezeigt. Auch im Untermenü [6 Graph analysieren] gibt es keine Auswahl zur Bestimmung von Wendepunkten. Eine direkte „Bestimmung" ist darum nicht möglich, aber eine stark GTR-gestützte „Berechnung".

Algebraisches Lösen

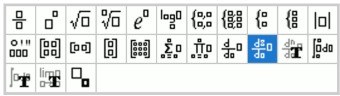
Das Vorgehen entspricht nahezu exakt dem zur Berechnung der lokalen Extrempunkte (↗ Rezept 10). Der einzige Unterschied besteht darin, dass wir über den Ableitungsoperator die 2. Ableitung von f1 definieren, da f''(x) = 0 notwendige Bedingung für das Vorliegen von Wendestellen ist.

Heft	GTR	Farbe
f(x)	f1	blau
f'(x)	f2	rot
f''(x)	f3	schwarz
g(x)	f4	magenta
…	…	…

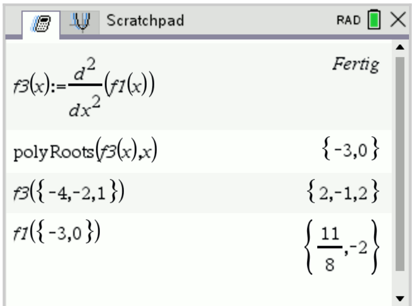
Hinweis: Da bei komplexeren Aufgaben häufig zwei (oder mehr) Funktionen und ihre Ableitungen vorkommen, empfiehlt sich ein festes **Schema für die Zuordnung zu den GTR-Funktionen**, an das man sich hält – es vereinfacht das Arbeiten und hilft Fehler zu vermeiden. Die Tabelle zeigt eine sinnvolle Zuordnung.

Bei älteren Modellen/OS-Versionen funktioniert polyRoots nicht in Kombination mit dem Ableitungsoperator. In dem Fall muss der Ableitungsterm manuell gebildet und als f2 definiert werden.

Wir definieren f'' als f3 über den Ableitungsoperator für die 2. Ableitung, der als Eingabemaske über ausgewählt und (wie in der unteren Abbildung gezeigt) befüllt wird.



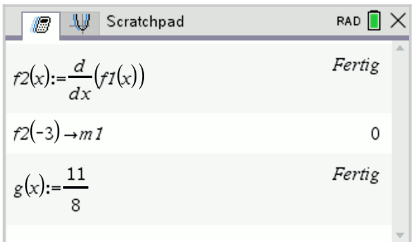
Wir bestimmen die Nullstellen von f'' und erhalten $x_1=-3$ und $x_2=0$ als potentielle Wendestellen. Das Vorzeichenwechselkriterium ergibt, dass beides Wendestellen sind. Entsprechend werden noch die y-Werte ermittelt. Die beiden Wendepunkte liegen bei $W_1(-3 \mid 1{,}375)$ und $W_2(0 \mid -2)$.



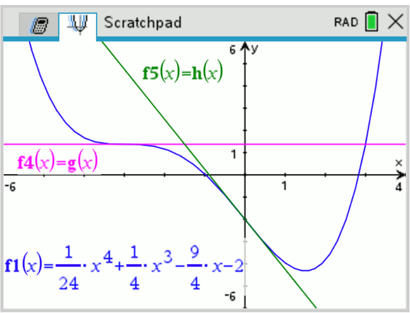
Hinweis: Empfehlenswert ist eine **„optische Kontrolle"** der Ergebnisse. Da f3 auch im Graphmodus bekannt ist, lässt sich anhand der Zeichnung schnell kontrollieren, ob an den berechneten Wendestellen tatsächlich Nullstellen der 2. Ableitung vorliegen.

Bestimme die Gleichungen der beiden Wendetangenten für f mit $f(x) = \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x - 2$.

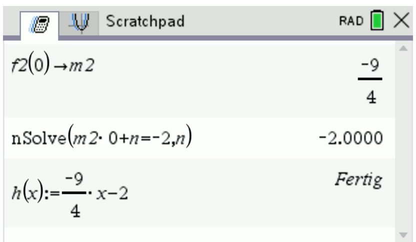
Das Lösungsverfahren entspricht dem zur Bestimmung einer Tangente an einer bestimmten Stelle (↗ Rezept 10), wobei die „bestimmten Stellen" hier die zuvor ermittelten Wendestellen sind. Die 1. Ableitung muss zuvor noch über den Ableitungsoperator als f2 definiert werden.



Da die Tangente g die Steigung 0 hat (es liegt ein Sattelpunkt vor) und der y-Wert des Wendepunktes bereits bekannt ist, muss hier nichts weiter berechnet werden.

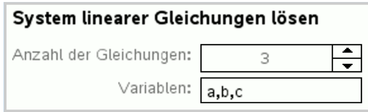


Für die Tangente h wird mit nSolve der y-Achsenabschnitt ermittelt und dann h(x) definiert.



Hinweis: Eine optische Kontrolle ist auch hier empfehlenswert. Dazu kann man im Graphmodus f4(x) = g(x) und f5(x) = h(x) setzen – die Terme müssen nicht erneut eingegeben werden.

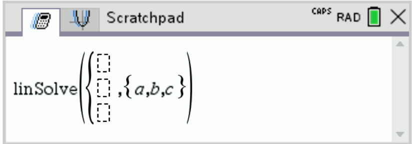
Lineare Gleichungssysteme

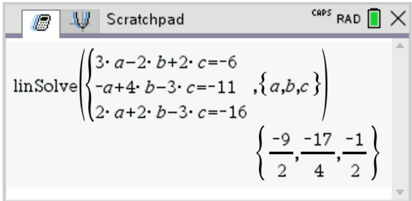


Bestimme die Lösungsmenge des LGS:
3a−2b+2c = −6 ∧ −a+4b−3c = −11 ∧ 2a+2b−3c = −16.

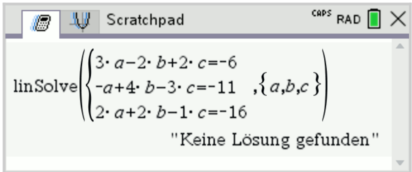
Der GTR verfügt über einen **linearen Gleichungslöser**, mit dem sich alle Lösungen des LGS bestimmen lassen. Über [menu] [3 Algebra] [2 System linearer Gleichungen lösen] öffnet sich ein Dialogfenster, wo man die Anzahl der Gleichungen und die Lösungsvariablen eingibt. Das erzeugt eine passende Maske, in die dann die drei Gleichungen eingegeben und durch Drücken von [enter] gelöst werden – die Abbildung rechts zeigt das Ergebnis.

Die Lösungen lauten $a=-\frac{9}{2}$, $b=-\frac{17}{4}$, $c=-\frac{1}{2}$.



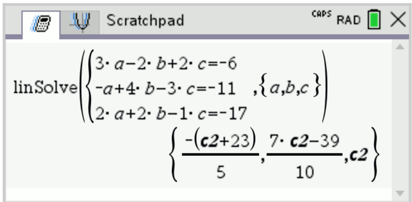


Wir ändern nun in der 3. Gleichung den Koeffizienten vor c von −3 in −1 und lassen das LGS erneut lösen. Der GTR meldet „Keine Lösung gefunden“, gemeint ist (immer):
Das LGS *hat* keine Lösung.



In der (geänderten) 3. Gleichung ändern wir jetzt den Wert rechts des Gleichheitszeichens von −16 in −17.
Die Lösung enthält nun einen Parameter (hier: *c*2), d.h. **das LGS hat keine eindeutige Lösung**. Im Heft würde man statt c2 z.B. t verwenden und die Terme umstellen.

Die Lösungen sind $a=-\frac{1}{5}t-\frac{23}{5}$, $b=\frac{7}{10}t-\frac{39}{10}$, $c=t$, $t\in\mathbb{R}$.



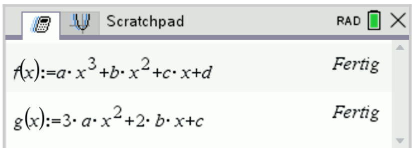
Hinweis: Die Funktion linSolve kann auch ohne Eingabemaske manuell eingegeben werden. Die Gleichungen stehen dann nebeneinander durch Komma getrennt. Für das Beispiel sähe die Eingabezeile so aus:
linSolve(**{**3a−2b+c=−6, −a+4b−3c=−11, 2a+2b−3c=−16**}** , {a,b,c**}**) ⚠ Klammersetzung beachten! ⚠

Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades verläuft durch den Punkt A(−1|4), hat bei x=5 eine Nullstelle und den lokalen Hochpunkt H(2|7). Bestimme den Funktionsterm f(x).

Der Ansatz dieser sogenannten „**Steckbriefaufgabe**“ führt zu einem LGS, dessen Lösung die gesuchten Koeffizienten des Polynoms liefert. Man kann diesen Ansatz manuell soweit vorbereiten, bis explizit lineare Gleichungen entstanden sind, die man so löst wie oben beschrieben. Es geht aber auch eleganter und effizienter.
Die (vier) Bedingungen, die sich aus der Beschreibung ergeben, lauten:

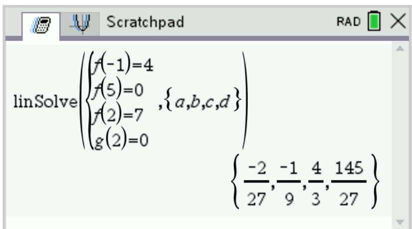
Punkt A:	f(-1) = 4
Nullstelle:	f(5) = 0
Hochpunkt:	f(2) = 7
Hochpunkt:	f'(2) = 0

Wenn wir f(x) und f '(x) zuvor definieren, dann können diese Bedingungen genau so vom GTR verarbeitet werden. Die Definition von f'(x) über den Ableitungsoperator funktioniert hier leider nicht – das führt zu einer Fehlermeldung.



Vorsicht Fehlerquelle: Bei der Definition der Funktionsterme *muss* zwischen den Koeffizienten a, b, c und der Variablen x explizit ein **Multiplikationszeichen** gesetzt werden! Andernfalls entstehen die Variablen ax, bx und cx und der Gleichungslöser liefert eine Fehlermeldung statt der Lösung.

Über [menu] [3 Algebra] [2 System linearer Gleichungen lösen] erstellen wir eine Maske für vier Gleichungen mit den Variablen a, b, c, d und befüllen sie wie rechts abgebildet. Als Lösung erhalten wir die Koeffizienten. Das gesuchte Polynom lautet also: $f(x)=-\frac{2}{27}x^3-\frac{1}{9}x^2+\frac{4}{3}x+\frac{145}{27}$



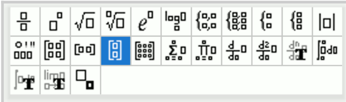
Bei älteren Modellen/OS-Versionen funktioniert das nicht. Die linearen Gleichungen müssen zuvor manuell entwickelt und dann wie oben gezeigt eingegeben werden.

Vektoren

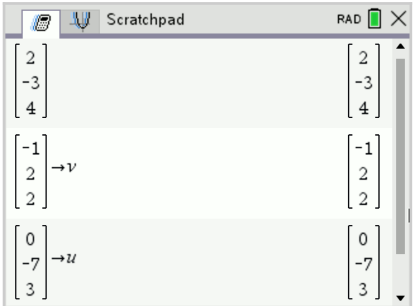
Vorbemerkung: Die Einsatzmöglichkeiten des GTR in der analytischen Geometrie sind gering. Abgesehen vom Lösen eines LGS (↗GTR-Rezept 12) kann der GTR nur grundlegende Operationen mit Vektoren ausführen. Dabei ist der Aufwand für die Eingabe in einigen Fällen mindestens so hoch wie der eingesparte Rechenaufwand (etwa beim Berechnen des Skalarprodukts).

Zwar bietet der GTR die Möglichkeit über das Graph-Modul in eine 3D-Ansicht zu wechseln und dort auf umständliche Weise z.B. die Parametergleichung einer Geraden einzugeben, die man dann in einem dreidimensionalen Koordinatensystem betrachten kann, aber „machen" kann man damit (außer dem Betrachten der Geraden im Raum) nichts. Eingebaute Funktionen, um etwa die Lagebeziehung oder den Schnittpunkt zweier Geraden zu bestimmen, gibt es nicht.

Vektoren eingeben



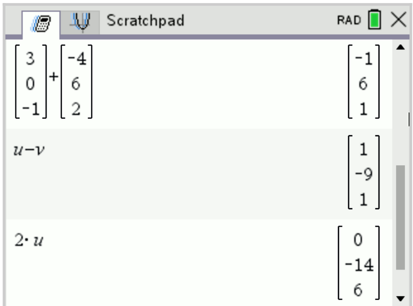
Alle Vektoroperationen erfolgen im Rechenmodus.
Zur Eingabe eines Vektors wird zunächst eine Vektormaske über den Katalog aufgerufen, die stets Platz für zwei Koordinaten hat. Schneller geht es, wenn man stattdessen eine eckige Klammer über [ctrl] [(] eingibt. So erhält man direkt eine Vektormaske mit Platz für eine Koordinate.



Um die Anzahl der Zeilen zu erhöhen, nutzt man (innerhalb der Vektormaske) die Zeilenumbruchtaste [↵].
Wenn die gewünschte Anzahl an Zeilen erreicht ist, befüllt man die Maske mit Zahlenwerten.

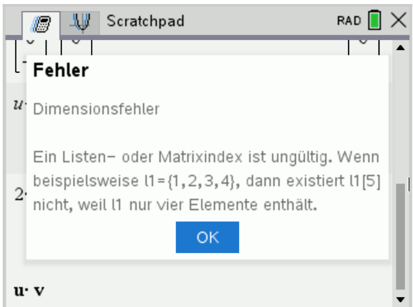
Vektoren können bei Bedarf in der gleichen Weise wie Zahlenwerte mittels [sto→] in einer Variablen gespeichert und durch Angabe der Variablen wieder abgerufen und in Berechnungen verwendet werden (↗GTR-Rezept 3).

Rechnen mit Vektoren



Die **Addition** und **Subtraktion** von Vektoren ebenso wie die **S-Multiplikation** funktionieren mit den üblichen Rechenzeichen, und zwar unabhängig davon, ob die Vektoren explizit angegeben oder zuvor definierte Variablen eingesetzt werden.

Das Skalarprodukt zweier Vektoren oder der Betrag eines Vektors lassen sich so allerdings nicht berechnen – dazu sind spezielle Befehle erforderlich. Die Abbildung rechts zeigt die wenig hilfreiche Fehlermeldung, die erscheint, wenn man zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ wie zwei Zahlen mittels [×] multipliziert.

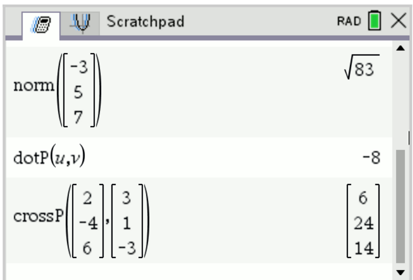


Die Befehle für die Vektor-Operationen erreicht man über

[menu] [7 Matrix und Vektor] [7 Normen] [1 Norm] (für den Betrag)

bzw. über [menu] [7 Matrix und Vektor] [C Vektor] (für die Multiplikation). Wie bei allen GTR-Befehlen ist alternativ eine manuelle Eingabe über das Tastenfeld möglich:

norm für den **Betrag eines Vektors**, *dotP* für das **Skalarprodukt** und *crossP* für das **Vektorprodukt**, das nicht zum Unterrichtsstoff des Grundkurses gehört.

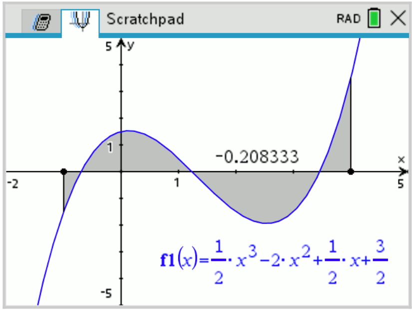


Integrale und Integralfunktionen

Bestimme $\int_{-1}^{4} f(x)\,dx$ für $f(x)=\frac{1}{2}x^3-2x^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$.

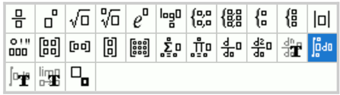
Graphisches Lösen

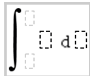
Gib den Funktionsterm im Graphmodus als f1 ein, lass den Graph in einem geeigneten Ausschnitt zeichnen und rufe menu [6 Graph analysieren] [6 Integral] auf. Es wird eine Markierungslinie für die Festlegung der unteren Integrationsgrenze angezeigt, die entweder durch verschoben oder durch Eingabe eines konkreten x-Wertes mit enter festgelegt wird. Danach verfährt man ebenso mit der oberen Grenze. Der Wert des Integrals wird eingeblendet.

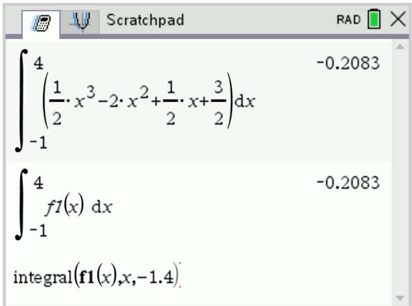


Algebraisches Lösen

Über den Maskenkatalog ruft man die Integralmaske auf und befüllt sie gemäß Aufgabenstellung. Der Integrand kann explizit als Term eingegeben werden (Zeile 1) *oder* als Funktionsname (Zeile 2), sofern die Funktion zuvor entsprechend definiert wurde.





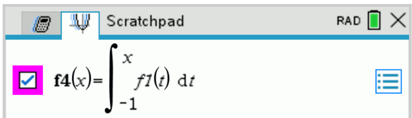


Alternativ erreicht man die Integralmaske auch über menu [4 Analysis] [2 Numerisches Integral] oder durch manuelle Eingabe von integral() – siehe letzte Zeile der Abbildung.

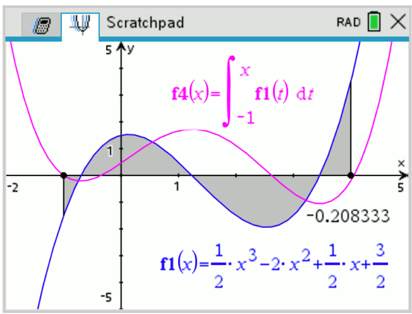
⚠ **Vorsicht**: Der Wert des Integrals ist *nicht* identisch mit dem Maß der oben eingefärbten Fläche, weil die Flächenstücke unterhalb der x-Achse negativ in die „Flächenbilanz" eingehen!

Zeichne den Graphen von F mit $F(x) = \int_{-1}^{x}\left(\frac{1}{2}t^3-2t^2+\frac{1}{2}t+\frac{3}{2}\right)dt$
und bestimme die obere Integrationsgrenze b, so dass F(b) = 0,8 ist.

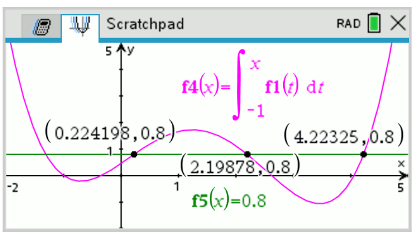
Der GTR kann zwar keinen Term für die Integralfunktion entwickeln, aber den Wert der Integralfunktion für jeden x-Wert (näherungsweise) berechnen – und das genügt hier. Wir wählen f4 für die Integralfunktion und definieren sie im Graphmodus über die bekannte Integral-Maske.



Hinweis: Unschön ist, dass der Graph auch links von x=−1 gezeichnet wird, obwohl er sinnvollerweise erst bei −1 beginnen sollte. Das lässt sich zwar ändern durch Verwendung einer abschnittsweise definierten Funktion. Die Eingabe erfolgt aber umständlich über eine eigene Maske, so dass wir darauf verzichten.

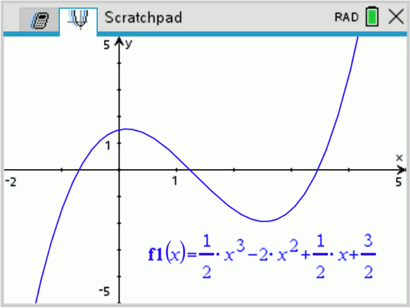


Für die **Bestimmung der oberen Integrationsgrenze b** empfiehlt sich das **graphische Lösen**, weil der Polynomgleichungslöser Integralfunktionen nicht verarbeiten kann. Gesucht sind alle Lösungen der Gleichung F(x) = 0,8, das entspricht den Schnittstellen des Graphen von F(x) mit der Geraden g(x) = 0,8. Wir definieren g als f5 und führen die Schnittpunktberechnung in bekannter Weise (↗ Rezept 9) durch. Die gesuchten Lösungen für b lauten demnach: $b_1 \approx 0{,}2242$, $b_2 \approx 2{,}1988$ und $b_3 \approx 4{,}2233$.

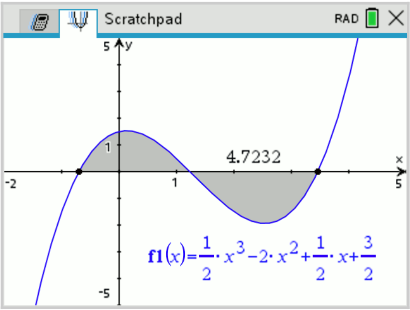


Integrale und Flächenberechnung

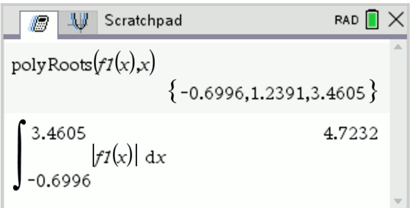
Bestimme das Maß der Fläche, die der Graph von f mit $f(x)=\frac{1}{2}x^3-2x^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ mit der x-Achse begrenzt.



Am effizientesten ist eine **graphische Lösung**. Nachdem der Graph in einem günstigen Ausschnitt gezeichnet wurde, wählt man `menu` [4 Graph analysieren] [7 Begrenzter Bereich]. Man wird nun aufgefordert, nacheinander zwei Graphen auszuwählen, zwischen denen eine Fläche aufgespannt wird. Man bewegt den Cursor auf den gewünschten Graph und bestätigt mit `enter`. Danach werden in gleicher Weise untere und obere Grenze für den Bereich festgelegt: Man bewegt den Cursor zum sichtbaren Schnittpunkt, bis dieser durch Einblendung „erkannt" wurde und wählt mit `enter` aus. Als Ergebnis wird die Fläche eingefärbt und das Flächenmaß eingeblendet.



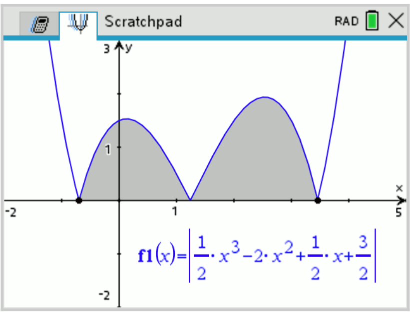
Achtung: Es handelt sich bei diesem Wert *nicht* um den Wert des Integrals in diesen Grenzen, sondern um das Flächenmaß! Flächenstücke unterhalb der x-Achse gehen bei diesem Verfahren automatisch positiv in die Gesamtfläche ein! Gefährlich ist, dass man das am reinen Ergebnis nicht erkennen kann. ⚠

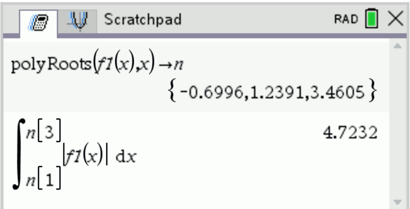


Falls das Flächenmaß „**berechnet**" werden soll, bietet sich eine Lösung im Rechenmodus an. Zunächst werden mit dem Polynomgleichungslöser die Nullstellen bestimmt und danach das Flächenmaß mit Hilfe eines Integrals.

Als Integrand verwenden wir dabei |f(x)| an Stelle von f(x).

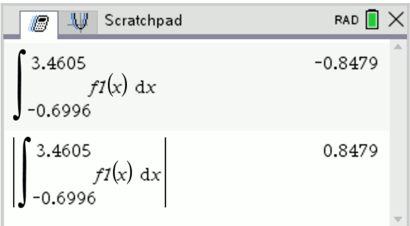
Zur Veranschaulichung (für die Lösung ist es nicht erforderlich) rechts die Abbildung des Graphen von |f(x)|: nun verläuft kein Teil des Graphen mehr unter der x-Achse.



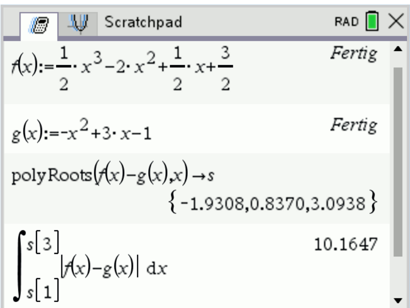


Wenn man das Ergebnis von polyRoots() einer Variablen zuweist, kann man mit Hilfe der Indexschreibweise auf die einzelnen Werte der Liste zurückgreifen und diese als Integrationsgrenzen einsetzen (Abbildung links).

Vorsicht: Betragsstriche sind „gefährlich"! Zum einen ist |f(x)| **kein Polynom** mehr, zum anderen müssen die Beträge an der richtigen Stelle gesetzt werden. Sieh dir die unterschiedlichen Versionen und die Ergebnisse in der Abbildung rechts an. ⚠



Bestimme das Maß der Fläche, die von den Graphen von f und g mit g(x) = −x²+3x−1 begrenzt wird.



Zum **graphischen Lösen** geht man genau so vor wie bei der oberen Aufgabe. Da genau zwei Graphen gezeichnet sind, muss man nicht einmal die Graphen, sondern nur die beiden äußeren Schnittpunkte als Grenzen auswählen.

Für die **rechnerische Lösung** definiert man f(x) und g(x), bestimmt deren Schnittstellen (↗ Rezept 9) als Integrationsgrenzen und berechnet das Integral der Differenzfunktion f(x)−g(x). Die Wirkung der Betragsstriche wurde oben erklärt. Das Maß der Fläche beträgt also $A \approx 10{,}1647$ FE.

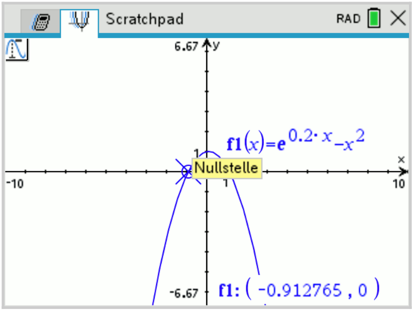
Exponentialfunktionen

Bestimme alle Nullstellen von f mit $f(x) = e^{0,2\cdot x} - x^2$.

Graphisches Lösen

Gib zunächst den Funktionsterm im Graphmodus als f1(x) ein (↗ Rezept 4).

Vorsicht Fehlerquelle: Für die Eingabe der e-Funktion muss die Taste [eˣ] verwendet werden. Die Kombination der Buchstabentaste [E] und [^] funktioniert nicht! Überprüfe auch die richtigen Grundeinstellungen für den Graphmodus (↗ Rezept 8)!



Fahre den Graphen im Trace-Modus ab (↗ Rezept 8). Die Abbildung zeigt die auf diese Weise gefundene linke Nullstelle im Standard-Fensterausschnitt: $x_1 \approx -0{,}9128$.

Falls dein GTR weniger Nachkommastellen anzeigt, dann ist die Grundeinstellung im Graphmodus nicht korrekt.

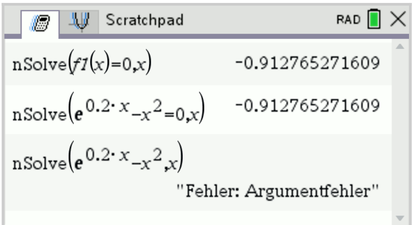
Entsprechend erhält man als Wert für die rechte Nullstelle $x_2 \approx 1{,}1183$.

Bewegt man den Trace-Cursor nun weiter nach rechts über x=10 hinaus (der Fensterausschnitt wandert mit) und gibt nicht zu früh auf, dann macht man eine interessante Entdeckung: Es gibt noch eine weitere Nullstelle, und zwar bei $x_3 \approx 35{,}7715$. Probiere es aus!

Algebraisches Lösen

Während die bisher gelernten graphischen Lösungsverfahren unabhängig vom Funktionstyp immer gleich (gut) funktionieren, gilt für das rechnerische Lösen nicht: Der bisher oft eingesetzte **Polynomgleichungslöser (polyRoots) ist nicht nutzbar**, weil er nur ganzrationale Funktionen verarbeiten kann. Stattdessen muss man sich **mit nSolve behelfen** (↗ Rezept 7).

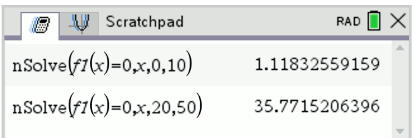
Der **numerische Gleichungslöser nSolve** wird über [menu] [3 Algebra] [1 Numerisch Lösen] oder mittels manueller Eingabe (↗ Rezept 3) aufgerufen. Als Argumente erwartet nSolve eine beliebige Gleichung und die Lösungsvariable. Da wir den Funktionsterm zuvor als f1 im Graphmodus eingegeben haben, ist der auch im Rechenmodus bekannt und kann genutzt werden (Zeile 1). Ansonsten gibt man eben den gesamten Funktionsterm ein (Zeile 2).



Beachte: Anders als bei polyRoots muss bei nSolve eine *komplette Gleichung* eingegeben werden. Eine implizite Vervollständigung („=0") wie bei polyRoots erfolgt nicht – man erhält in dem Fall eine Fehlermeldung (Zeile 3).

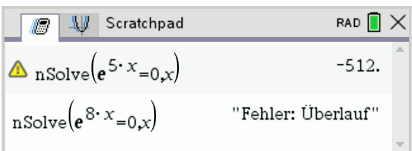
Bei der Einführung von nSolve (↗ Rezept 7) haben wir schon gelernt, dass nSolve immer höchstens eine Lösung liefert – egal wie viele Lösungen die Gleichung hat. Genauer kann man sagen: Es wird jeweils die am nächsten an 0 liegende Lösung geliefert.

Weitere Lösungen lassen sich bestimmen, indem man ein Lösungsintervall explizit angibt, und zwar als weitere Argumente nach der Lösungsvariable. Sucht man z.B. im Intervall [0; 10], dann liefert nSolve die Nullstelle $x_2 \approx 1{,}1183$ und für das Intervall [20; 50] die Nullstelle $x_3 \approx 35{,}7715$.



Der große(!) Haken an der Sache: Wenn man nicht weiß, wo man suchen muss, ist nSolve nur von sehr begrenztem Nutzen. In der Regel wird man daher das graphische Lösen vorziehen.

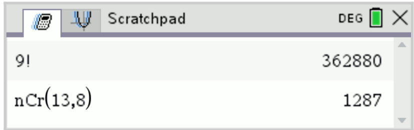
Vorsicht Fehlerquelle: Noch ein Problem kommt bei nSolve hinzu. Wenn man Pech hat, dann werden Lösungen „gefunden", die gar keine sind oder der GTR liefert eine Fehlermeldung. Die beiden Gleichungen in der Abbildung haben keine Lösung – der GTR findet trotzdem x=–512. Das vorangestellte Ausrufezeichen, das nach der Berechnung dort erscheint, signalisiert zumindest: „Achtung, es könnte auch falsch sein …".



Binomialverteilungen

Das Ausrufezeichen zur **Berechnung einer Fakultät** findet man in der Zeichentabelle [ctrl] [📖] oder erhält es über [menu] [5 Wahrscheinlichkeit] [1 Fakultät (!)].

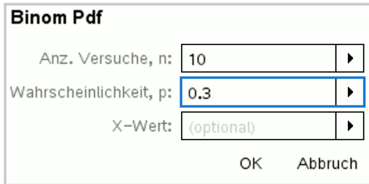
Zur **Berechnung von Binomialkoeffizienten** benutzt man am besten die dafür eingebaute Funktion *nCr*. Man kann sie über [menu] [5 Wahrscheinlichkeit] [3 Kombinationen] aufrufen oder auch direkt über die Buchstabentasten eingeben. Die Abbildung zeigt die Berechnung von $\binom{13}{8}$.



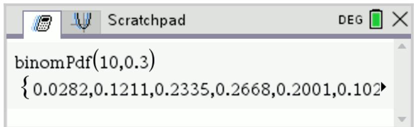
Für das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten ist eine **Genauigkeit von vier Nachkommastellen** empfehlenswert (↗ Rezept 1): [⌂ on] [5 Einstellungen] [2 Dokumenteneinstellungen] Angezeigte Ziffern: Fließ4

Berechne die vollständige Wahrscheinlichkeitsverteilung für eine binomialverteilte Zufallsgröße X mit n = 10 und Erfolgswahrscheinlichkeit p = 0,3 sowie μ_X und σ_X.

Benötigt wird die Funktion *binomPdf*, die man im Rechenmodus über [menu] [5 Wahrscheinlichkeit] [5 Verteilungen] [A BinomialPdf] aufruft. Es öffnet sich ein kleines Eingabefenster, in das man die Werte für n und p eingibt. → Wenn man den x-Wert leer lässt, erhält man als Ergebnis eine Liste mit allen Wahrscheinlichkeiten P(X=0), ..., P(X=10).
Es ist also z.B. P(X=1) ≈ 0,1211.



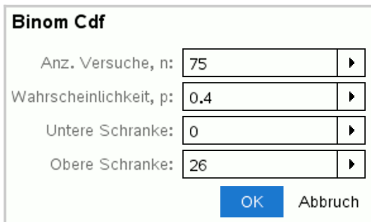
Wenn man nur eine einzelne Wahrscheinlichkeit benötigt, kann man den Wert für X entsprechend eintragen.
Als Alternative zum Eingabefenster kann man den Funktionsnamen über die Buchstabentasten eingeben (↗ Rezept 3) und dann befüllen.

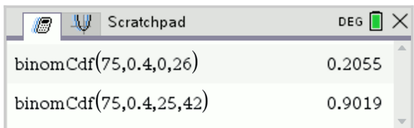


Die Werte für μ_X und σ_X berechnet man direkt: $\mu_X = 10 \cdot 0{,}3 = 3$ und $\sigma_X = \sqrt{10 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7} \approx 1{,}4490$.

Berechne ausgewählte (kumulierte) Wahrscheinlichkeiten für eine binomialverteilte Zufallsgröße X mit n = 75 und p = 0,4.

Für eine binomialverteilte Zufallsgröße X berechnet man P(X=k) mittels der oben eingesetzten Funktion *binomPdf* (**p**robability **d**istribution **f**unction). Kumulierte Wahrscheinlichkeiten berechnet man mittels *binomCdf* (**c**umulated **d**istribution **f**unction).
Über [menu] [5 Wahrscheinlichkeit] [5 Verteilungen] [B BinomialCdf] öffnet man das passende Eingabefenster und befüllt es.
Auch für *binomCdf* ist alternativ eine Direkteingabe über die Buchstabentasten möglich.





Die abgebildete Tabelle zeigt an typischen Beispielen, mit welchen Werten welche der GTR-Funktionen aufgerufen werden muss, um das gewünschte mathematische Ergebnis zu erhalten. Erinnerung: Die GTR-Darstellung gehört nicht in die mathematische Darstellung!

Mathematische Schreibweise	GTR-Eingabe	Ergebnis
P(X = 30)	BinomPdf(75,0.4,30)	0,0937
P(X ≤ 26)	BinomCdf(75,0.4,26)	0,2055
P(X < 43)	BinomCdf(75,0.4,42)	0,9982
P(X ≥ 19)	BinomCdf(75,0.4,19,75)	0,9973
P(X > 33)	BinomCdf(75,0.4,34,75)	0,2041
P(25 ≤ X ≤ 42)	BinomCdf(75,0.4,25,42)	0,9019
P(37 < X < 65)	BinomCdf(75,0.4,38,64)	0,0396

Weitere Beispiele zum Nachrechnen:
Für eine B(100; 0,3)-verteilte Zufallsgröße X ist P(X = 36) ≈ 0,0362.
Für eine B(200; 0,15)-verteilte Zufallsgröße X ist P(X < 29) ≈ 0,3914 und P(X ≥ 44) ≈ 0,0053.
Für ein B(350; 0,62)-verteiltes X ist P(171 ≤ X ≤ 222) ≈ 0,7267 und P(205 ≤ X < 274) ≈ 0,9151.